FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Inhalt

Übersicht:

- Fehlerarten
- Statistische Verteilung von Messabweichungen (Messfehlern)
- Vertrauensbereiche & Messunsicherheit
- Fehlerfortpflanzung nach Gauß

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerarten

Wir wollen eine Größe x messen und führen dazu eine Messreihe durch, d.h. wir messen mehrmals, unabhängig voneinander mit der selben Messapparatur unter möglichst gleichen Bedingungen.

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerarten

Wir wollen eine Größe x messen und führen dazu eine Messreihe durch, d.h. wir messen mehrmals, unabhängig voneinander mit der selben Messapparatur unter möglichst gleichen Bedingungen.

Das Ergebnis sind die folgenden Werte: $x_1, x_2, \ldots x_n$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerarten

Wir wollen eine Größe x messen und führen dazu eine Messreihe durch, d.h. wir messen mehrmals, unabhängig voneinander mit der selben Messapparatur unter möglichst gleichen Bedingungen.

Das Ergebnis sind die folgenden Werte: $x_1, x_2, \ldots x_n$

Man sagt, dass die Werte eine Messreihe mit n Mess- oder Beobachtungs-werten bilden.

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerarten

Wir wollen eine Größe x messen und führen dazu eine Messreihe durch, d.h. wir messen mehrmals, unabhängig voneinander mit der selben Messapparatur unter möglichst gleichen Bedingungen.

Das Ergebnis sind die folgenden Werte: $x_1, x_2, \ldots x_n$

Man sagt, dass die Werte eine Messreihe mit n Mess- oder Beobachtungswerten bilden.

Die Erfahrung zeigt, dass immer – auch bei noch so genauer Vorbereitung – Messabweichungen (Messfehler) auftreten.

Aktuell korrekte Bezeichnung

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerarten

Wir unterscheiden drei Fehlerarten:

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerarten

Wir unterscheiden drei Fehlerarten:

Grobe Fehler:

Entstehen durch fehlerhaftes Verhalten z.B. falsches Ablesen der Messwerte, unsachgemäße Bedienung der Messapparatur oder beschädigte Messgeräte.

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerarten

Wir unterscheiden drei Fehlerarten:

Grobe Fehler:

Entstehen durch fehlerhaftes Verhalten z.B. falsches Ablesen der Messwerte, unsachgemäße Bedienung der Messapparatur oder beschädigte Messgeräte.

Systematische Abweichungen (Fehler):

Alle Messwerte zeigen das gleiche Fehlerverhalten, d.h. sind entweder zu groß oder zu klein. Systematische Abweichungen entstehen z.B. wenn Skalen unter einem gewissen Winkel systematisch falsch abgelesen werden.

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerarten

Wir unterscheiden drei Fehlerarten:

Grobe Fehler:

Entstehen durch fehlerhaftes Verhalten z.B. falsches Ablesen der Messwerte, unsachgemäße Bedienung der Messapparatur oder beschädigte Messgeräte.

Systematische Abweichungen (Fehler):

Alle Messwerte zeigen das gleiche Fehlerverhalten, d.h. sind entweder zu groß oder zu klein. Systematische Abweichungen entstehen z.B. wenn Skalen unter einem gewissen Winkel systematisch falsch abgelesen werden.

vermeidbar

Zufällige Abweichungen (Fehler):

Entstehen durch Einwirkung vieler Faktoren wie z.B. Temperatur- und Luftdruckschwankungen. Sie treten zufällig verteilt und nicht systematisch auf.

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Statistische Verteilung der Messwerte/Messabweichungen

Nur unter den folgenden Bedingungen können wir verlässliche Aussagen über Messwerte und Messabweichungen treffen:

Die Messwerte unterliegen dem gleichen Genauigkeitsmaß, d.h. gleiches Messobjekt, gleiche Messmethode, gleiches Messgerät. Alle Messungen werden von ein und der selben Person in kurzen Zeitabständen am Selben Ort durchgeführt.

Die Messwerte sind voneinander unabhängig, d.h. keine Messung beeinflusst irgendwie die nachfolgenden Messungen

Die auftretenden Messabweichungen sind ausschließlich zufällig.

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Statistische Verteilung der Messwerte/Messabweichungen

Wir führen zur Bestimmung der Größe x eine Messreihe durch.

Die einzelnen Messergebnisse bezeichnen wir mit: $x_1, x_2, \ldots x_n$

Statistische Messauswertung

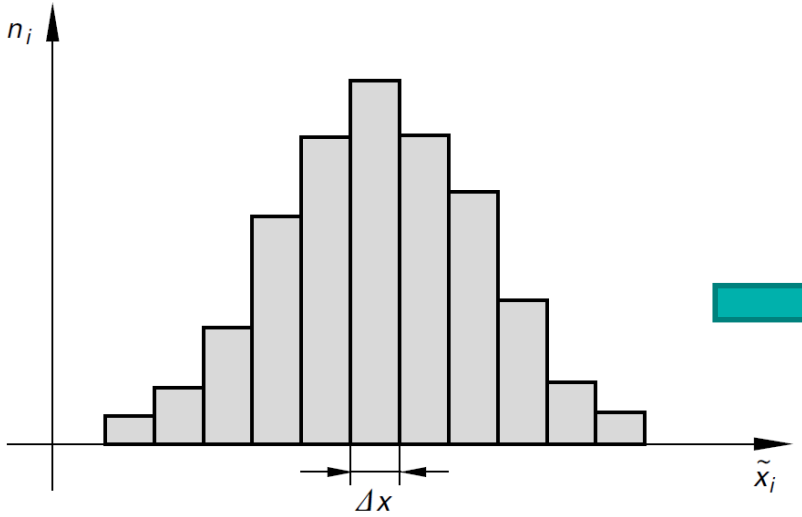
Mehr zur Fehlerrechnung

Statistische Verteilung der Messwerte/Messabweichungen

Wir führen zur Bestimmung der Größe x eine Messreihe durch.

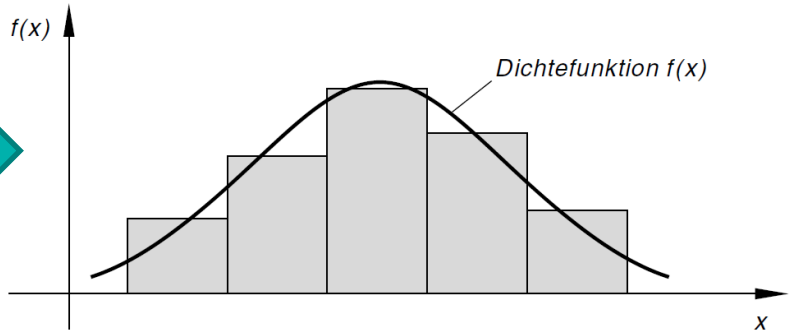
Die einzelnen Messergebnisse bezeichnen wir mit: $x_1, x_2, \ldots x_n$

Zur Bestimmung der Häufigkeitsverteilung, werden die einzelnen Ergebnisse geclustert, d.h. in Klassen gleicher Breite zusammen-gefasst.



Quelle: Papula, Band 3

Bei unendlich vielen Messwerten…



Die Werte sind normalverteilt

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Beispiel:

Wir wollen den Widerstand einer Spule bestimmen und messen dazu 80-mal. Die erhaltenen Werte liegen zwischen 200.6 und 210.3 Ω.

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

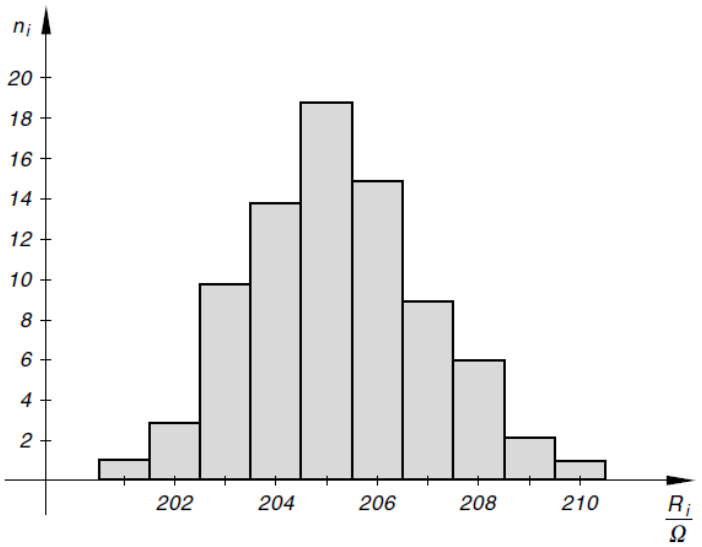
Beispiel:

Wir wollen den Widerstand einer Spule bestimmen und messen dazu 80-mal. Die erhaltenen Werte liegen zwischen 200.6 und 210.3 Ω.

Wir unterteilen in 10 Klassen mit der Klassenbreite 1 Ω.

Klassen-Nr. i	Klassengrenzen (in Ω)	Klassenmitte (in Ω)	Absolute Klassenhäufigkeit n_i
1	200,5 . . . 201,5	201	1
2	201,5 . . . 202,5	202	3
3	202,5 . . . 203,5	203	10
4	203,5 . . . 204,5	204	14
5	204,5 . . . 205,5	205	19
6	205,5 . . . 206,5	206	15
7	206,5 . . . 207,5	207	9
8	207,5 . . . 208,5	208	6
9	208,5 . . . 209,5	209	2
10	209,5 . . . 210,5	210	1
			$\sum = 80$

Quelle: Papula, Band 3



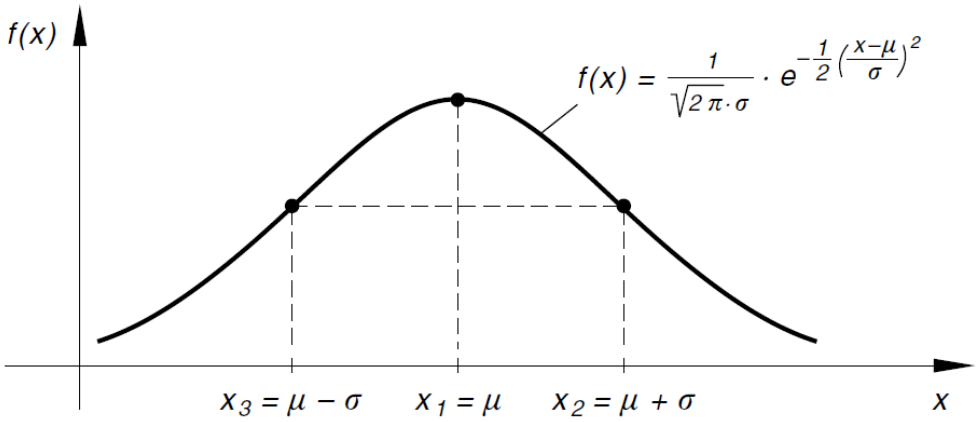
Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Normalverteilte Messgrößen

Was haben wir davon, dass wir wissen, dass Messwerte in einer Messreihe normalverteilt sind?

Glockenkurve…



Quelle: Papula, Band 3

Charakteristische Größen…

μ Erwartungswert

σ Standardabweichung

Mehr zur Fehlerrechnung

Erwartungswert

Wenn wir unsere Messungen unendlich oft wiederholen, würden wir den Erwartungswert μ mit der größten Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit) erhalten.

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Erwartungswert

Wenn wir unsere Messungen unendlich oft wiederholen, würden wir den Erwartungswert μ mit der größten Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit) erhalten.

Die Glockenkurve besitzt an dieser Stelle ihr Maximum.

Mehr zur Fehlerrechnung

Erwartungswert

Wenn wir unsere Messungen unendlich oft wiederholen, würden wir den Erwartungswert μ mit der größten Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit) erhalten.

Die Glockenkurve besitzt an dieser Stelle ihr Maximum.

Es handelt sich um den wahrscheinlichsten Wert.

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Erwartungswert

Wenn wir unsere Messungen unendlich oft wiederholen, würden wir den Erwartungswert μ mit der größten Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit) erhalten.

Die Glockenkurve besitzt an dieser Stelle ihr Maximum.

Es handelt sich um den wahrscheinlichsten Wert.

Messreihe:

Bei einer Messreihe gehen wir davon aus, dass der tatsächliche Messwert dem Erwartungswert entspricht. Die Messergebnisse streuen um diesen Wert entsprechend der Normalverteilung.

→ Der Mittelwert unserer Messreihe stellt eine gute Approximation für den Erwartungswert da.

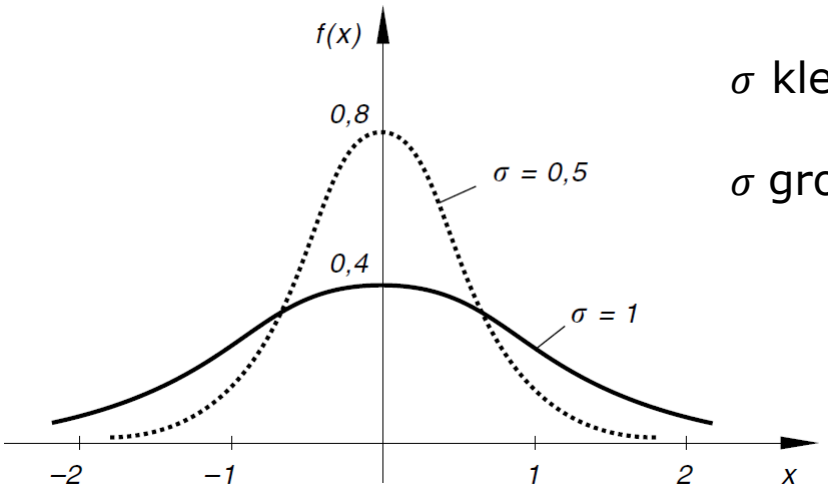
→ In der Statistik wird von einem Schätzer gesprochen

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Standardabweichung

Die Standardabweichung liefert ein Maß für die Breite, d.h. die Abweichung der Glockenkurve vom Erwartungswert.



Quelle: Papula, Band 3

σ klein ⇒ stark ausgeprägtes Maximum

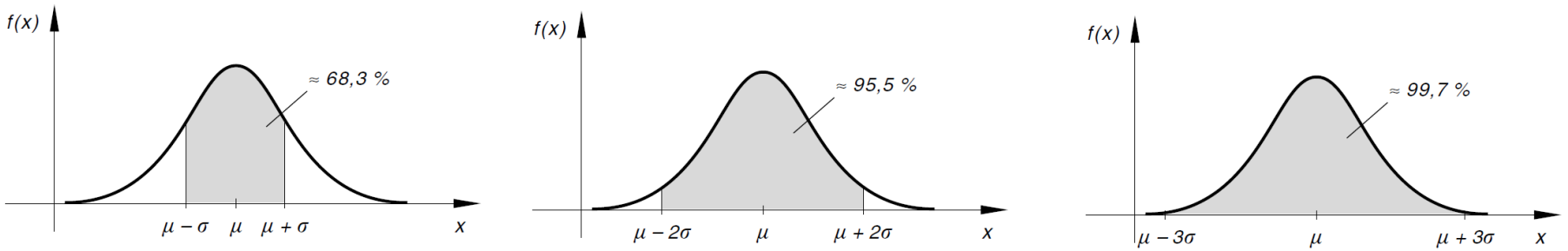
σ groß ⇒ breite Kurve

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Standardabweichung

Für unsere Zwecke gibt die Standardabweichung an, wie die Messwerte um den exakten Wert (Erwartungswert) verteilt sind…



Quelle: Papula, Band 3

Die Standardabweichung liefert Aussagen über das Δx

Wir benötigen auch hierfür eine Approximation (Schätzer)

Statistische Messauswertung

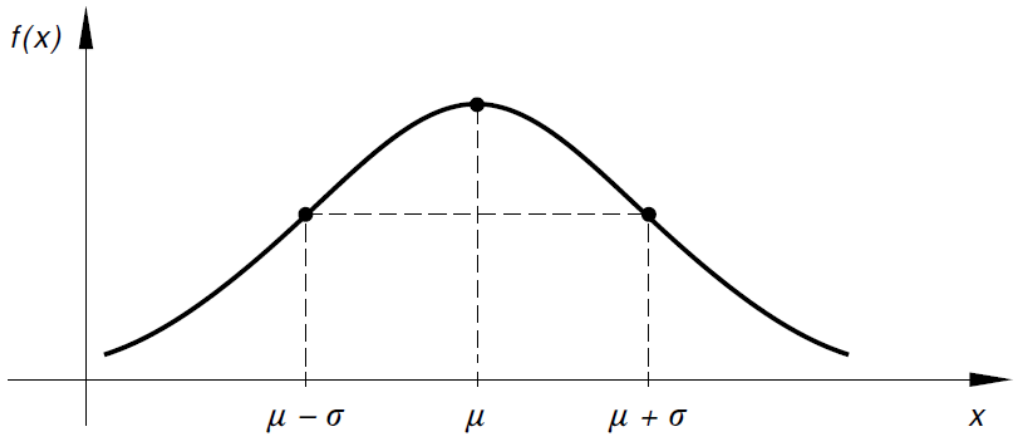
Mehr zur Fehlerrechnung

Auswerten einer Messreihe

Wir gehen von einer Messreihe mit n Messungen aus: $x_1, x_2, \ldots x_n$

Die Messreihe wurde unter kontrollierten Bedingungen durchgeführt, sodass eine statistische Auswertung möglich ist.

Wir gehen davon aus, dass die Messgrößen normalverteilt sind, mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ.



Quelle: Papula, Band 3

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Auswerten einer Messreihe

Der arithmetische Mittelwert liefert den besten Schätzwert für den gesuchten Erwartungswert der Messreihe…

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots x_n)$$

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Auswerten einer Messreihe

Der arithmetische Mittelwert liefert den besten Schätzwert für den gesuchten Erwartungswert der Messreihe…

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots x_n)$$

Damit liefert der Mittelwert der Messreihe den besten Schätzwert der gesuchten Messgröße x.

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Auswerten einer Messreihe

Die Streuung der einzelnen Messwerte um den arithmetischen Mittelwert lässt sich durch die folgende Formel bestimmen…

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Auswerten einer Messreihe

Die Streuung der einzelnen Messwerte um den arithmetischen Mittelwert lässt sich durch die folgende Formel bestimmen…

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Die Formel liefert ein Maß für die Zuverlässigkeit der Einzelmessungen.

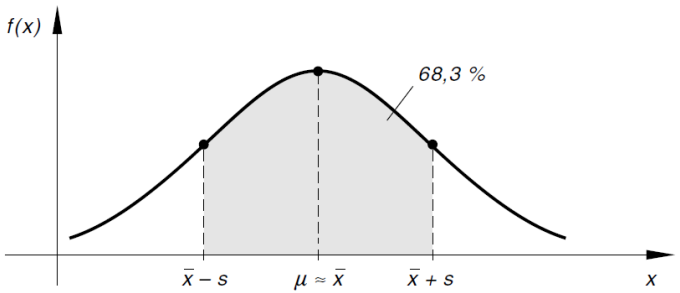
Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Auswerten einer Messreihe

Die Streuung der einzelnen Messwerte um den arithmetischen Mittelwert lässt sich durch die folgende Formel bestimmen…

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$



Quelle: Papula, Band 3

Die Formel liefert ein Maß für die Zuverlässigkeit der Einzelmessungen.

Sie stellt den besten Schätzwert für die unbekannte Standardabweichung der Normalverteilung dar. Wir können also erwarten, dass ca. 68 von 100 Messwerten im Intervall $[\bar{x} - s; \bar{x} + s]$ liegen.

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Auswerten einer Messreihe

Um ermitteln zu können, wie gut der Mittelwert den Erwartungswert schätzt, bestimmen wir die Standardabweichung des Mittelwertes…

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Auswerten einer Messreihe

Um ermitteln zu können, wie gut der Mittelwert den Erwartungswert schätzt, bestimmen wir die Standardabweichung des Mittelwertes…

Wir nehmen an, dass wir mehrere Messreihen durchführen. Jede Messreihe liefert einen anderen Mittelwert. Wenn wir von diesen die Standardabweichung berechnen, erhalten wir ein Maß für die Güte des Mittelwertes…

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Auswerten einer Messreihe

Um ermitteln zu können, wie gut der Mittelwert den Erwartungswert schätzt, bestimmen wir die Standardabweichung des Mittelwertes…

Wir nehmen an, dass wir mehrere Messreihen durchführen. Jede Messreihe liefert einen anderen Mittelwert. Wenn wir von diesen die Standardabweichung berechnen, erhalten wir ein Maß für die Güte des Mittelwertes…

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Dieser Wert $s_{\bar{x}}$ kennzeichnet die Genauigkeit des Mittelwertes und ist kleiner als die Standardabweichung s der Einzelmessungen.

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Zeit für ein Beispiel…

Wir haben folgende Messungen zur Bestimmung eines Widerstandes durchgeführt und die folgenden Rechengrößen bestimmt…

i	$\frac{R_i}{\Omega}$	$\frac{R_i - \bar{R}}{\Omega}$	$\frac{(R_i - \bar{R})^2}{\Omega^2}$
1	151,5	1,2	1,44
2	149,7	– 0,6	0,36
3	149,1	– 1,2	1,44
4	150,3	0	0
5	151,3	1,0	1,00
6	150,9	0,6	0,36
7	150,6	0,3	0,09
8	149,8	– 0,5	0,25
9	149,4	– 0,9	0,81
10	150,4	0,1	0,01
$\sum$	1503,0	0	5,76

Quelle: Papula, Band 3

Mittelwert:

$$\bar{R} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{n} R_i = \frac{1}{10} \cdot 1503.0 = 150.3\ \Omega$$

Standardabweichung:

$$s = \sqrt{\frac{1}{10-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (R_i - \bar{R})^2} = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 5.76} = 0.8\ \Omega$$

Standardabweichung Mittelwert:

$$s_{\bar{R}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0.8}{\sqrt{10}} = 0.25\ \Omega$$

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Vertrauensbereiche & Messunsicherheit

Wir fassen zusammen…

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Vertrauensbereiche & Messunsicherheit

Wir fassen zusammen…

- Wir ermitteln aus einer Messreihe $x_1, x_2 \ldots x_n$ den arithmetischen Mittelwert als besten Schätz- oder Näherungswert für den unbekannten (wahren) Wert μ der normalverteilten Messgröße.

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Vertrauensbereiche & Messunsicherheit

Wir fassen zusammen…

- Wir ermitteln aus einer Messreihe $x_1, x_2 \ldots x_n$ den arithmetischen Mittelwert als besten Schätz- oder Näherungswert für den unbekannten (wahren) Wert μ der normalverteilten Messgröße.

- Wir können daher nicht erwarten, dass $\bar{x} = \mu$ gilt.

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Vertrauensbereiche & Messunsicherheit

Wir fassen zusammen…

- Wir ermitteln aus einer Messreihe $x_1, x_2 \ldots x_n$ den arithmetischen Mittelwert als besten Schätz- oder Näherungswert für den unbekannten (wahren) Wert μ der normalverteilten Messgröße.

- Wir können daher nicht erwarten, dass $\bar{x} = \mu$ gilt.

- Die aus verschiedenen Messreihen (gleichen Umfangs) bestimmten Mittelwerte streuen also um μ. Ein Maß hierfür liefert $s_{\bar{x}}$.

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Vertrauensbereiche & Messunsicherheit

Wir fassen zusammen…

- Wir ermitteln aus einer Messreihe $x_1, x_2 \ldots x_n$ den arithmetischen Mittelwert als besten Schätz- oder Näherungswert für den unbekannten (wahren) Wert μ der normalverteilten Messgröße.

- Wir können daher nicht erwarten, dass $\bar{x} = \mu$ gilt.

- Die aus verschiedenen Messreihen (gleichen Umfangs) bestimmten Mittelwerte streuen also um μ. Ein Maß hierfür liefert $s_{\bar{x}}$.

Ziel:

Wir wollen ein symmetrisches Intervall um den Mittelwert $\bar{x}$ angeben, welches mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit den Erwartungswert μ enthält.



Wir konstruieren ein Vertrauensintervall

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Vertrauensbereiche & Messunsicherheit

Wir suchen ein Vertrauensintervall, welches mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit γ den unbekannten Erwartungswert μ enthält.

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

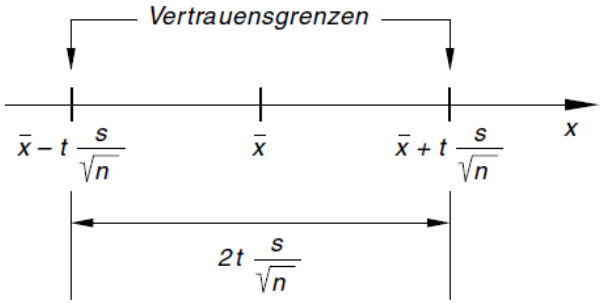
Vertrauensbereiche & Messunsicherheit

Wir suchen ein Vertrauensintervall, welches mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit γ den unbekannten Erwartungswert μ enthält.

Da wir auch die Standardabweichung σ der normalverteilten Messreihe nicht kennen, verwenden wir den Schätzer s…

Untere Vertrauensgrenze: $\bar{x} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

Obere Vertrauensgrenze: $\bar{x} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$



Quelle: Papula, Band 3

Mittelwert

Standardabweichung $s_{\bar{x}}$ des Mittelwertes

Faktor, abhängig von der gewählten Wahrscheinlichkeit

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Vertrauensbereiche & Messunsicherheit

Wie wählen wir den Parameter t?

Den Parameter entnehmen wir einer Tabelle, entsprechend der gewünschten Wahrscheinlichkeit und entsprechend der Anzahl der Messungen.

(t-Verteilung nach Student)

Anzahl n der Messwerte	Vertrauensniveau (statistische Sicherheit)			
	$\gamma = 68{,}3\,\%$	$\gamma = 90\,\%$	$\gamma = 95\,\%$	$\gamma = 99\,\%$
2	1,84	6,31	12,71	63,66
3	1,32	2,92	4,30	9,93
4	1,20	2,35	3,18	5,84
5	1,15	2,13	2,78	4,60
6	1,11	2,02	2,57	4,03
7	1,09	1,94	2,45	3,71
8	1,08	1,90	2,37	3,50
9	1,07	1,86	2,31	3,36
10	1,06	1,83	2,26	3,25
15	1,04	1,77	2,14	2,98
20	1,03	1,73	2,09	2,86
30	1,02	1,70	2,05	2,76
50	1,01	1,68	2,01	2,68
100	1,00	1,66	1,98	2,63
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	1,00	1,65	1,96	2,58

Quelle: Papula, Band 3

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Vertrauensbereiche & Messunsicherheit

Wir betrachten die Situation noch einmal genauer…

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Vertrauensbereiche & Messunsicherheit

Wir betrachten die Situation noch einmal genauer…

Vertrauensbereich: $\bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

Statistische Messauswertung

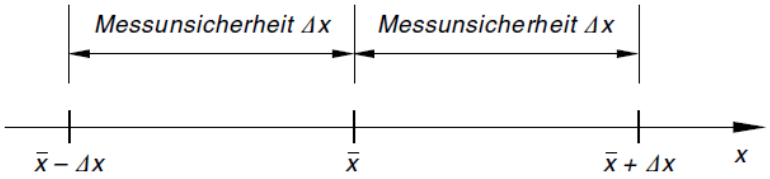
Mehr zur Fehlerrechnung

Vertrauensbereiche & Messunsicherheit

Wir betrachten die Situation noch einmal genauer…

Vertrauensbereich: $\bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

Messwert: $x = \bar{x} \pm \underbrace{t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}}_{= \Delta x}$



Quelle: Papula, Band 3

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Beispiel

Für die Schwingungsdauer T eines Fadenpendels haben wir folgende Werte gemessen und berechnet…

i	$\frac{T_i}{\mathrm{s}}$	$\frac{T_i - \overline{T}}{\mathrm{s}}$	$\frac{(T_i - \overline{T})^2 \cdot 10^6}{\mathrm{s}^2}$
1	1,254	0,001	1
2	1,260	0,007	49
3	1,250	− 0,003	9
4	1,251	− 0,002	4
5	1,245	− 0,008	64
6	1,258	0,005	25
$\sum$	7,518	0	152

Quelle: Papula, Band 3

$$\overline{T} = \frac{1}{6} \cdot 7.518 = 1.253 \text{ s}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{6-1} \cdot 152 \cdot 10^{-6}} = 5.51 \cdot 10^{-3} \approx 0.006 \text{ s}$$

Vertrauensintervall mit Niveau γ =95%

$$\Delta T = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.57 \cdot \frac{0.006}{\sqrt{6}} = 0.006 \text{ s}$$

Anzahl n der Messwerte	Vertrauensniveau (statistische Sicherheit)			
	γ = 68,3 %	γ = 90 %	γ = 95 %	γ = 99 %
6	1,11	2,02	2,57	4,03
7	1,09	1,94	2,45	3,71

aus Tabelle…

$$T = (1.253 \pm 0.006)\text{s}$$

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerfortpflanzung nach Gauß

Wir kommen zurück zum Problem, bei dem wir eine Größe indirekt bestimmen wollen…

$$f = f(x, y, \dots)$$

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerfortpflanzung nach Gauß

Wir kommen zurück zum Problem, bei dem wir eine Größe indirekt bestimmen wollen…

$$f = f(x, y, \dots)$$

Die direkten Messgrößen $x, y, \dots$ sind unabhängig voneinander und normalverteilt.

Unsere Zielgröße, die wir indirekt bestimmen wollen ist ebenfalls normalverteilt.

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerfortpflanzung nach Gauß

Wir bestimmen durch Messreihen die Mittelwerte $\bar{x}, \bar{y}, \ldots$ der einzelnen Messgrößen als Schätzwert für die tatsächliche Größe.

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerfortpflanzung nach Gauß

Wir bestimmen durch Messreihen die Mittelwerte $\bar{x}, \bar{y}, \ldots$ der einzelnen Messgrößen als Schätzwert für die tatsächliche Größe.

Den Mittelwert $\bar{f}$ der Zielgröße, erhalten wir, indem wir die Mittelwerte der Einzelmessungen in die entsprechende Formel für f einsetzen…

$$\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y}, \ldots)$$

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerfortpflanzung nach Gauß

Wir bestimmen durch Messreihen die Mittelwerte $\bar{x}, \bar{y}, \ldots$ der einzelnen Messgrößen als Schätzwert für die tatsächliche Größe.

Den Mittelwert $\bar{f}$ der Zielgröße, erhalten wir, indem wir die Mittelwerte der Einzelmessungen in die entsprechende Formel für f einsetzen…

$$\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y}, \ldots)$$

Dieser Mittelwert liefert einen Schätzer (eine Approximation) für die indirekte Messgrößen, die wir bestimmen wollen.

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerfortpflanzung nach Gauß

Da die direkten Messwerte x_i und y_i um die Mittelwerte streuen, streut auch die indirekt bestimmte Messgröße $\bar{f}$.

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerfortpflanzung nach Gauß

Da die direkten Messwerte x_i und y_i um die Mittelwerte streuen, streut auch die indirekt bestimmte Messgröße $\bar{f}$.

Wir wollen daher die Standardabweichung s_f der indirekten Messgröße als Maß für diese Streuung berechnen.

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerfortpflanzung nach Gauß

Da die direkten Messwerte x_i und y_i um die Mittelwerte streuen, streut auch die indirekt bestimmte Messgröße $\bar{f}$.

Wir wollen daher die Standardabweichung s_f der indirekten Messgröße als Maß für diese Streuung berechnen.

Frage:

Wie wirken sich die Standardabweichungen s_x, s_y … der voneinander unabhängigen Messgrößen auf die Standardabweichung s_f der abhängigen, indirekten Messgröße aus?

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerfortpflanzung nach Gauß

Die Standardabweichung der indirekten Messgröße f ergibt sich wie folgt:

$$s_f = \sqrt{(\partial_x f(\bar{x}, \bar{y} \dots) \cdot s_x)^2 + \left(\partial_y f(\bar{x}, \bar{y} \dots) \cdot s_y\right)^2 + \cdots}$$

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerfortpflanzung nach Gauß

Die Standardabweichung der indirekten Messgröße f ergibt sich wie folgt:

$$s_f = \sqrt{(\partial_x f(\bar{x}, \bar{y} \dots) \cdot s_x)^2 + \left(\partial_y f(\bar{x}, \bar{y} \dots) \cdot s_y\right)^2 + \cdots}$$

Gauß‘sches Fehlerfortpflanzungsgesetz für die Standardabweichung…

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Fehlerfortpflanzung nach Gauß

Die Standardabweichung der indirekten Messgröße f ergibt sich wie folgt:

$$s_f = \sqrt{(\partial_x f(\bar{x}, \bar{y} \dots) \cdot s_x)^2 + \left(\partial_y f(\bar{x}, \bar{y} \dots) \cdot s_y\right)^2 + \cdots}$$

Gauß‘sches Fehlerfortpflanzungsgesetz für die Standardabweichung…

Es gibt auch eine Formel für die Standardabweichung des Mittelwertes…

$$s_{\bar{f}} = \sqrt{(\partial_x f(\bar{x}, \bar{y} \dots) \cdot s_{\bar{x}})^2 + \left(\partial_y f(\bar{x}, \bar{y} \dots) \cdot s_{\bar{y}}\right)^2 + \cdots}$$

Mehr zur Fehlerrechnung

Anwendung auf Messreihen

Wir wollen die Größe $f = f(x, y)$ bestimmen, die von den beiden direkten Messgrößen x und y abhängt.

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Anwendung auf Messreihen

Wir wollen die Größe $f = f(x, y)$ bestimmen, die von den beiden direkten Messgrößen x und y abhängt.

Die Messergebnisse liegen in folgender Form vor…

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \qquad y = \bar{y} \pm \Delta \mathrm{y}$$

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Anwendung auf Messreihen

Wir wollen die Größe $f = f(x, y)$ bestimmen, die von den beiden direkten Messgrößen x und y abhängt.

Die Messergebnisse liegen in folgender Form vor…

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \qquad y = \bar{y} \pm \Delta \mathrm{y}$$

Die Messunsicherheiten setzt man üblicherweise wie folgt an:

$$\Delta x = s_{\bar{x}} \qquad \Delta y = s_{\bar{y}}$$

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Anwendung auf Messreihen

Wir bestimmen dann die indirekte Messgröße, indem wir die Mittelwerte, d.h. unsere Messwerte für x und y in die Formel einsetzen:



$$\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Anwendung auf Messreihen

Wir bestimmen dann die indirekte Messgröße, indem wir die Mittelwerte, d.h. unsere Messwerte für x und y in die Formel einsetzen:



$$\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

Als Maß für die Unsicherheit Δf der indirekt bestimmten Größe wählen wir:

$$\Delta f = s_{\bar{f}} = \sqrt{(\partial_x f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \Delta x)^2 + \left(\partial_y f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \Delta y\right)^2}$$

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Anwendung auf Messreihen

Wir bestimmen dann die indirekte Messgröße, indem wir die Mittelwerte, d.h. unsere Messwerte für x und y in die Formel einsetzen:

$$\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

Als Maß für die Unsicherheit Δf der indirekt bestimmten Größe wählen wir:

$$\Delta f = s_{\bar{f}} = \sqrt{(\partial_x f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \Delta x)^2 + \left(\partial_y f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \Delta y\right)^2}$$

Die indirekt bestimmte Messgröße liegt damit in der folgenden Form vor…

$$f = \bar{f} \pm \Delta f$$

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Beispiel

Die Federkonstante c eines Federpendels ergibt sich aus Masse und Schwingungsdauert:

$$c = c(m, T) = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$$

Wir messen…

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{m}{\mathrm{g}}$	198	199	203	200	202	198	201	197	203	199
$\frac{T}{\mathrm{s}}$	2,01	2,04	1,96	1,98	2,00	2,05	1,97	1,98	2,04	1,97

Quelle: Papula, Band 3

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

Beispiel

Wir berechnen die folgenden statistischen Größen…

i	$\frac{m_i}{\mathrm{g}}$	$\frac{m_i - \overline{m}}{\mathrm{g}}$	$\frac{(m_i - \overline{m})^2}{\mathrm{g}^2}$	$\frac{T_i}{\mathrm{s}}$	$\frac{T_i - \overline{T}}{\mathrm{s}}$	$\frac{(T_i - \overline{T})^2 \cdot 10^4}{\mathrm{s}^2}$
1	198	−2	4	2,01	0,01	1
2	199	−1	1	2,04	0,04	16
3	203	3	9	1,96	−0,04	16
4	200	0	0	1,98	−0,02	4
5	202	2	4	2,00	0	0
6	198	−2	4	2,05	0,05	25
7	201	1	1	1,97	−0,03	9
8	197	−3	9	1,98	−0,02	4
9	203	3	9	2,04	0,04	16
10	199	−1	1	1,97	−0,03	9
$\sum$	2000	0	42	20,00	0	100

Quelle: Papula, Band 3

$$\overline{m} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} m_i = \frac{1}{10} \cdot 2000\,\mathrm{g} = 200\,\mathrm{g}$$

$$s_{\overline{m}} = \sqrt{\frac{1}{10 \cdot (10-1)} \cdot \sum_{i=1}^{10} (m_i - \overline{m})^2} = \sqrt{\frac{1}{90} \cdot 42\,\mathrm{g}^2} = 0{,}68\,\mathrm{g} \approx 0{,}7\,\mathrm{g}$$

$$\overline{T} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} T_i = \frac{1}{10} \cdot 20{,}00\,\mathrm{s} = 2{,}00\,\mathrm{s}$$

$$s_{\overline{T}} = \sqrt{\frac{1}{10 \cdot (10-1)} \cdot \sum_{i=1}^{10} (T_i - \overline{T})^2} = \sqrt{\frac{1}{90} \cdot 100 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^2} =$$

$$= 0{,}0105\,\mathrm{s} \approx 0{,}01\,\mathrm{s}$$

$$m = \overline{m} \pm \Delta m = \overline{m} \pm s_{\overline{m}} = (200 \pm 0{,}7)\,\mathrm{g}$$

$$T = \overline{T} \pm \Delta T = \overline{T} \pm s_{\overline{T}} = (2{,}00 \pm 0{,}01)\,\mathrm{s}$$

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

$$c = c(m, T) = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$$

Beispiel

Wir haben folgende Messergebnisse gefunden:

$$m = \overline{m} \pm \Delta m = \overline{m} \pm s_{\overline{m}} = (200 \pm 0{,}7)\,\mathrm{g}$$

$$T = \overline{T} \pm \Delta T = \overline{T} \pm s_{\overline{T}} = (2{,}00 \pm 0{,}01)\,\mathrm{s}$$

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

$$c = c(m,T) = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$$

Beispiel

Wir haben folgende Messergebnisse gefunden:

$$m = \overline{m} \pm \Delta m = \overline{m} \pm s_{\overline{m}} = (200 \pm 0{,}7)\,\mathrm{g}$$

$$T = \overline{T} \pm \Delta T = \overline{T} \pm s_{\overline{T}} = (2{,}00 \pm 0{,}01)\,\mathrm{s}$$

Hieraus erhalten wir für die Federkonstante:

$$\overline{c} = f(\overline{m};\overline{T}) = 4\pi^2 \cdot \frac{\overline{m}}{\overline{T}^2} = 4\pi^2 \cdot \frac{200\,\mathrm{g}}{(2{,}00\,\mathrm{s})^2} = 1973{,}9\,\mathrm{g/s^2} \approx$$

$$\approx 1{,}974\,\mathrm{kg/s^2} = 1{,}974\,\mathrm{N/m}$$

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

$$c = c(m,T) = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$$

Beispiel

Zur Bestimmung der Fehlerfortpflanzung benötigen wir die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial c}{\partial m} = 4\pi^2 \cdot \frac{1}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}, \qquad \frac{\partial c}{\partial T} = 4\pi^2 \cdot m\left(-2T^{-3}\right) = -8\pi^2 \cdot \frac{m}{T^3}$$

$$\frac{\partial c}{\partial m}\left(\overline{m};\overline{T}\right) = \frac{4\pi^2}{\overline{T}^2} = \frac{4\pi^2}{(2{,}00\ \mathrm{s})^2} = 9{,}8696\ \mathrm{s}^{-2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial T}\left(\overline{m};\overline{T}\right) = -8\pi^2 \cdot \frac{\overline{m}}{\overline{T}^3} = -8\pi^2 \cdot \frac{200\ \mathrm{g}}{(2{,}00\ \mathrm{s})^3} = -1973{,}9\ \mathrm{g/s}^3$$

Statistische Messauswertung

Mehr zur Fehlerrechnung

$$c = c(m,T) = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$$

Beispiel

Zur Bestimmung der Fehlerfortpflanzung benötigen wir die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial c}{\partial m} = 4\pi^2 \cdot \frac{1}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}, \qquad \frac{\partial c}{\partial T} = 4\pi^2 \cdot m(-2T^{-3}) = -8\pi^2 \cdot \frac{m}{T^3}$$

$$\frac{\partial c}{\partial m}(\overline{m};\overline{T}) = \frac{4\pi^2}{\overline{T}^2} = \frac{4\pi^2}{(2{,}00\ \mathrm{s})^2} = 9{,}8696\ \mathrm{s}^{-2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial T}(\overline{m};\overline{T}) = -8\pi^2 \cdot \frac{\overline{m}}{\overline{T}^3} = -8\pi^2 \cdot \frac{200\ \mathrm{g}}{(2{,}00\ \mathrm{s})^3} = -1973{,}9\ \mathrm{g/s}^3$$

Messunsicherheit nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\Delta c = s_{\overline{c}} = \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial T}\Delta T\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(9{,}8696\ \mathrm{s}^{-2} \cdot 0{,}68\ \mathrm{g})^2 + (-1973{,}9\ \mathrm{g} \cdot \mathrm{s}^{-3} \cdot 0{,}0105\ \mathrm{s})^2} =$$

$$= 21{,}79\ \mathrm{g/s}^2 = 0{,}0218\ \mathrm{kg/s}^2 \approx 0{,}022\ \mathrm{N/m}$$

$$c = \overline{c} \pm \Delta c = \overline{c} \pm s_{\overline{c}} = (1{,}974 \pm 0{,}022)\ \mathrm{N/m}$$

$$\left|\frac{\Delta c}{\overline{c}}\right| = \frac{0{,}022\ \mathrm{N/m}}{1{,}974\ \mathrm{N/m}} \cdot 100\,\% = 1{,}1\,\%$$